

SHORTER COMMUNICATIONS

BERECHNUNG VON REGENERATOREN MIT HILFE DER GAUßSCHEN INTEGRATIONSMETHODE

HELMUTH HAUSEN

Hannover, Technische Universität, Callinstrasse 15F, FRG

(Received 16 February 1973)

BEZEICHNUNGEN

- C , Wärmekapazität der in der Zeiteinheit durch den Regenerator strömenden Gasmenge;
 C_s , Wärmekapazität der Speichermasse eines Regenerators;
 F , Wärmeübertragende Oberfläche der Speichermasse;
 f , Oberfläche der Speichermasse zwischen Gaseintritt und der betrachteten Stelle des Regenerators; dient als Längskoordinate;
 $f(\xi)$, Anfängliche Temperaturverteilung in der Speichermasse, ausgedrückt als Übertemperatur gegenüber der Eintrittstemperatur ϑ_1 des Gases;
 $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots, f_N$, Werte von $f(\xi)$ an den Intervallgrenzen;
 $f_{1a}, f_{1b}, \dots, f_{na}, f_{nb}, \dots$, Werte von $f(\xi)$ innerhalb der Intervalle an den für die Gaußsche Integration hervorgehobenen Stellen (Bilder 1, 3 und 4);
 K , Funktion von ξ oder $\xi - \varepsilon$, Kern der Integralgleichung (6);
 n , Nummer des betrachteten Intervalls;
 N , Gesamtzahl der Intervalle (Streifen in Bild 2, 3 und 4);
 $t(\xi)$, Übertemperatur der Speichermasse zu einer späteren reduzierten Zeit η ;
 $y(\xi)$, Nach der Gaußschen Methode zu integrierende Funktion von ε .

Griechische Buchstaben

- $\bar{\alpha}$, Wärmeübergangskoeffizient, bezogen auf die Differenz zwischen der mittleren Steintemperatur und der Gastemperatur;
 ε , Integrationsvariable, die unter dem Integral ξ vertritt;
 ξ , reduzierte Längskoordinate nach Gl. (1);
 η , reduzierte Zeit nach Gl. (2);
 Λ , Länge des Regenerators im reduzierten Maß;
 Π , Dauer einer Warm- oder Kaltperiode im reduzierten Maß;
 τ_1 , Zeit;
 ϑ_1 , und ϑ_1' , Eintrittstemperaturen der beiden Gase.

EINLEITUNG: GRUNDLEGENDE BEZIEHUNGEN

ES WERDE ein Regenerator mit einer gleichmäßig verteilten Speichermasse der Wärmekapazität C_s und der wärmeübertragenden Oberfläche F betrachtet. Alle Stoffwerte

der Speichermasse und der durch den Regenerator strömenden Gase seien unabhängig von der Temperatur. Um den Wärmeleitwiderstand innerhalb der Speicherelemente zu berücksichtigen, werde mit einem auf die mittlere Steintemperatur bezogenen Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}$ gerechnet, der ebenfalls konstant sei. Die beiden an der Wärmeübertragung beteiligten Gase treten abwechselnd an den entgegengesetzten Enden des Regenerators mit konstanter Temperatur ϑ_1 bzw. ϑ_1' ein. Die Lage einer Stelle innerhalb des Regenerators werde durch den Teil f der Speicheroberfläche gekennzeichnet, der zwischen dieser Stelle und der Stelle des Gaseintritts liegt, so daß f als Längskoordinate betrachtet werden kann. Ferner sei C die Wärmekapazität der in der Zeiteinheit durch den Regenerator strömenden Gasmenge und τ die Zeit.

Unter diesen Voraussetzungen kann man den Temperaturverlauf der Speichermasse und des Gases zu einer beliebigen Zeit als Funktion der beiden folgenden dimensionslosen Größen

$$\text{reduzierte Längskoordinate } \xi = \frac{\bar{\alpha}}{C} f, \quad (1)$$

$$\text{reduzierte Zeit } \eta = \frac{\bar{\alpha} F}{C_s} \tau. \quad (2)$$

darstellen.

Zur Zeit $\eta = 0$ sei eine Anfangstemperaturverteilung $f(\xi) + \vartheta_1$ der Speichermasse vorgegeben, wobei $f(\xi)$ die Übertemperatur gegenüber der Eintrittstemperatur ϑ_1 des Gases bedeutet. Zu einer späteren Zeit η , zu der noch dasselbe Gas durch den Regenerator strömt, ist, wie schon früher gezeigt wurde [1,2] die Übertemperatur $t(\xi)$ durch die folgende Beziehung bestimmt:

$$t(\xi) = f(\xi) e^{-\eta} + \int_0^{\xi} f(\varepsilon) K(\xi - \varepsilon) d\varepsilon \quad (3)$$

mit

$$K(\xi - \varepsilon) = e^{-(\xi - \varepsilon + \eta)} \sqrt{\left[\frac{\eta}{\xi - \varepsilon} \right]} iJ_1 \left\{ 2i \sqrt{[(\xi - \varepsilon)\eta]} \right\}, \quad (4)$$

worin J_1 die Besselsche Funktion erster Art und erster Ordnung kennzeichnet.* $K(\xi - \varepsilon)$ kann auch weitgehend

*Neuerdings schreibt man statt $iJ_1(ix)$ auch $I_1(x)$.

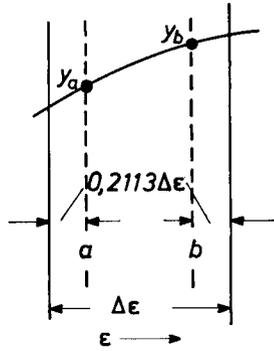


BILD 1. Für die Gaußsche Integration hervorgehobene Stellen a und b im Bereich Δε.

nach der asymptotischen Gleichung

$$K(\xi - \varepsilon) = e^{-\sqrt{(\xi - \varepsilon) - \sqrt{\eta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}}} \times \sqrt[4]{\left[\frac{\eta}{(\xi - \varepsilon)^3} \right] \left(1 - \frac{0,188}{\sqrt{[(\xi - \varepsilon)\eta]} - \frac{0,0293}{(\xi - \varepsilon)\eta}} \right)} \quad (5)$$

berechnet werden. Bei $\sqrt{[(\xi - \varepsilon)\eta]} = 2$ ist der Fehler dieser Gleichung bereits kleiner als 2% und nimmt mit wachsendem $(\xi - \varepsilon)\eta$ rasch ab.

Mit Hilfe der Gl. (3) kann man nicht nur bei gegebener Anfangstemperatur die Temperaturverteilung zu einer späteren Zeit η berechnen, sondern man kann daraus auch eine Beziehung für den streng periodischen Beharrungszustand ableiten, indem man die hier nicht näher zu erörternde Umschaltbedingung hinzunimmt. Hierbei besteht die Aufgabe, die unbekanntes Anfangstemperatur $f(\xi)$ zu Beginn der Warm- oder Kaltperiode zu ermitteln. Zur Vereinfachung sei vorausgesetzt, daß, ausgedrückt in den dimensionslosen Koordinaten ξ und η , die reduzierte Regeneratorlänge Λ und die reduzierte Periodendauer Π in beiden Perioden dieselben Werte haben. Dann gilt, wie schon früher auf verschiedenem Wege gezeigt wurde [1-3], für den Beharrungszustand folgende Integralgleichung:

$$f(\xi) e^{-\Pi} + f(\Lambda - \xi) + \int_0^\xi f(\varepsilon) K(\xi - \varepsilon)_{\eta=\pi} \cdot d\varepsilon = \vartheta_1 - \vartheta_1, \quad (6)$$

worin ϑ_1 und ϑ_1' wieder die erwähnten Gaseintrittstemperaturen bedeuten. Durch Lösung dieser Integralgleichung kann die Temperaturverteilung $f(\xi)$ zu Beginn einer Periode ermittelt werden.

Zur Auswertung der Integrale in den Gln. (3) und (6) haben Illiffe [4] und der Verfasser [2] unabhängig voneinander die Simpsonsche Regel angewendet. Im folgenden soll gezeigt werden, daß auch die Gaußsche Integrationsmethode eine Möglichkeit der Auswertung bietet, allerdings nicht ohne eine zusätzliche Komplikation. Es ist aber zu erwarten, daß durch die Anwendung dieser Methode die Genauigkeit gesteigert werden kann.

DIE GAUßSCHE INTEGRATIONSMETHODE

Über eine Funktion $y(\varepsilon)$ soll in einem vorgegebenen Bereich $\Delta\varepsilon$ integriert werden. Nach Gauss genügt die Kenntnis der Werte dieser Funktion an einigen hervorgehobenen Stellen im Bereich $\Delta\varepsilon$, um den Integralwert mit

großer Genauigkeit angeben zu können. Im folgenden sollen nur zwei solche Funktionswerte y_a und y_b benutzt werden. Die Stellen a und b, an denen diese Funktionswerte innerhalb des Bereiches $\Delta\varepsilon$ festzulegen sind, sollen von den Grenzen des Intervalles den Abstand $0,2113 \Delta\varepsilon$ haben (vgl. Bild 1). Dann ergibt sich der Wert des Integrals aus der einfachen Beziehung

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon + \Delta\varepsilon} y(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon}{2} (y_a + y_b). \quad (7)$$

Diese Beziehung ist exakt, wenn die Funktion im Bereich $\Delta\varepsilon$ parabolisch verläuft. Sie gilt mit guter Näherung, wenn die Abweichungen vom parabolischen Verlauf nur gering sind.

AUSWERTUNG DER INTEGRALE IN DEN GLN. (3) UND (6) NACH DEM GAUßSCHEM VERFAHREN

Wie bei Anwendung der Simpsonschen Regel oder auch der Wärmepolmethode [2] denke man sich ein Diagramm, in dem die Temperatur der Speichermasse abhängig von $\xi = \varepsilon$ über die ganze Regeneratorlänge Λ aufgetragen ist, in N Streifen gleicher Breite $\Delta\varepsilon$ unterteilt (Bild 2). Das

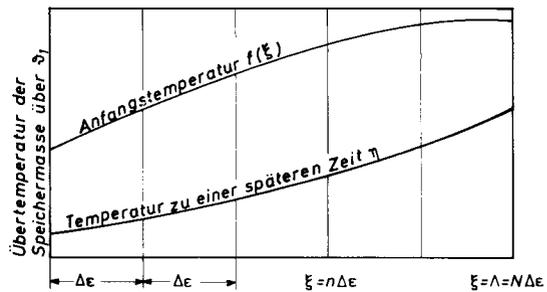


BILD 2. Aufteilung des Temperaturdiagramms des Regenerators in Streifen gleicher Breite Δε.

Gaußsche Verfahren soll auf jeden dieser Streifen getrennt angewendet werden. Auch hier seien die hervorgehobenen Stellen a und b wie in Bild 1 dadurch bestimmt, daß sie von den Grenzen des betrachteten Streifens den Abstand $0,2113 \Delta\varepsilon$ haben. Im n-ten Streifen seien die Anfangstemperaturen an diesen Stellen mit f_{na} und f_{nb} , die entsprechenden Werte der Funktion $K(\varepsilon)$ mit K_{na} und K_{nb} bezeichnet (Bild 3). Entsprechendes gelte für jeden anderen Streifen. Soll wie in den Gln. (3) und (6) von $\xi = 0$ bis $\xi = n \cdot \Delta\varepsilon$, also über n Streifen integriert werden, dann folgt

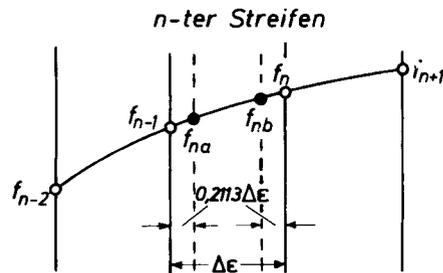


BILD 3. Zur Ermittlung der innerhalb des n-ten Streifens liegenden Temperaturen f_{na} und f_{nb} aus den Temperaturen f_{n-2} , f_{n-1} , f_n und f_{n+1} .

durch sinngemäße Anwendung von Gl. (7):

$$\int_0^{\xi=n\Delta\epsilon} f(\epsilon)K(\xi-\epsilon) \cdot d\epsilon = \frac{\Delta\epsilon}{2} [(f_{1a}K_{nb}+f_{1b}K_{na})+(f_{2a}K_{n-1,b}+f_{2b}K_{n-1,a}) + \dots + (f_{n-1,a}K_{2b}+f_{n-1,b}K_{2a})+(f_{n,a}K_{1b}+f_{n,b}K_{1a})]. \quad (8)$$

Eine solche Gleichung gilt für jeden Wert von $\xi = n\Delta\epsilon$ mit $n = 1, 2, 3$ usw., während für $n = 0$ der Wert des Integrals verschwindet. Damit kann man bei gegebener Anfangstemperaturverteilung und daher auch bekannten Werten von $f_{1a}, f_{1b}, f_{2a}, f_{2b}, f_{3a}$ usw. nach Gl. (3) die Endtemperaturen $t(\xi)$ zu einer späteren Zeit η an den Intervallgrenzen $\xi = n\Delta\epsilon$ berechnen.

Die Ermittlung des Beharrungszustandes bedarf zusätzlicher Überlegungen. Denn es besteht zunächst die Schwierigkeit, daß im Integral nur die Temperaturen an den hervorgehobenen Stellen innerhalb der Streifen, in den beiden ersten Ausdrücken von Gl. (6) aber die Temperaturen $f(\xi)$ und $f(\Lambda - \xi)$ an den Intervallgrenzen auftreten. Die Zahl aller dieser Temperaturen, die vor Bestimmung des Beharrungszustandes unbekannt sind, ist etwa 3mal so groß wie die Zahl der Bestimmungsgleichungen, die in der beschriebenen Weise aus Gl. (6) unter Berücksichtigung von Gl. (8) gebildet werden können. Diese Schwierigkeit kann man nur dadurch beheben, daß man die innerhalb der Intervalle liegenden Temperaturen f_{1a}, f_{1b}, f_{2a} usw. durch die Temperaturen f_0, f_1, f_2 usw. bis f_N an den Grenzen der Intervalle ausdrückt. Dies kann mit sehr guter Näherung durch eine Interpolationsgleichung 3. Grades in folgender Weise geschehen.

Im n -ten streifen (Bild 3) sollen die Temperaturen f_{na} und f_{nb} aus den Temperaturen f_{n-2}, f_{n-1}, f_n und f_{n+1} an den Intervallgrenzen ermittelt werden. Legt man nun eine die Gleichung 3. Grades der Art

$$f\left(\frac{\epsilon}{\Delta\epsilon}\right) = a + b \frac{\epsilon}{\Delta\epsilon} + c \left(\frac{\epsilon}{\Delta\epsilon}\right)^2 + d \left(\frac{\epsilon}{\Delta\epsilon}\right)^3$$

so fest, daß sie die Temperaturen f_{n-2}, f_{n-1}, f_n und f_{n+1} wiedergibt (s. Bild 3), dann kann man aus dieser Gleichung f_{na} und f_{nb} berechnen. Hierbei ist es ratsam, den Nullpunkt von $\epsilon/\Delta\epsilon$ in die Mitte des n -ten Streifens zu legen, sodass nach Festlegung der Konstanten die Rechnung nur noch für $\epsilon/\Delta\epsilon = 0,5 - 0,2113 = 0,2887$ und $\epsilon/\Delta\epsilon = -0,2887$ durchzuführen ist. Man erhält in dieser Weise:

$$f_{na} = -0,0497 f_{n-2} + 0,8544 f_{n-1} + 0,2289 f_n - 0,0336 f_{n+1} \quad (9)$$

$$f_{nb} = -0,0336 f_{n-2} + 0,2289 f_{n-1} + 0,8544 f_n - 0,0497 f_{n+1}. \quad (10)$$

Für den 1. und letzten Streifen, die an den Enden des Regenerators liegen, muß man das Verfahren sinngemäß wie folgt abändern. Um f_{1a} und f_{1b} zu ermitteln, legt man die durch die vier Temperaturen f_0, f_1, f_2 und f_3 verlaufende Kurve 3. Grades fest (Bild 4). Daraus erhält man für den 1. Streifen

$$f_{1a} = 0,6557 f_0 + 0,5270 f_1 - 0,2324 f_2 + 0,0497 f_3 \quad (11)$$

$$f_{1b} = 0,0943 f_0 + 1,0562 f_1 - 0,1842 f_2 + 0,0337 f_3. \quad (12)$$

Entsprechend ergibt sich für den letzten der N Streifen

$$f_{Na} = 0,0337 f_{N-3} - 0,1842 f_{N-2} + 1,0562 f_{N-1} + 0,0943 f_N \quad (13)$$

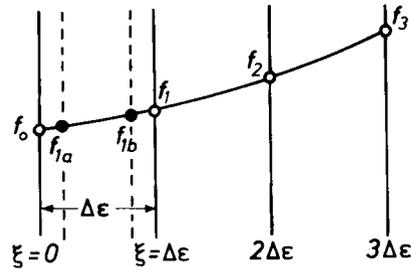


BILD 4. Bestimmung von f_{1a} und f_{1b} im ersten Streifen.

$$f_{Nb} = 0,0497 f_{N-3} - 0,2324 f_{N-2} + 0,5270 f_{N-1} + 0,6557 f_N. \quad (14)$$

Durch Einsetzen all dieser Beziehungen in Gl. (8) für das Integral erhält man schließlich aus Gl. (6) $N + 1$ Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Temperaturen f_0, f_1, f_2 usw. bis f_N im Beharrungszustand.

Die zuletzt entwickelten Beziehungen (9) bis (14) können auch bei Benutzung von Gl. (3) nützlich sein, z.B. wenn die Anfangstemperaturen f_0, f_1, f_2 usw. gegeben sind und man zur Anwendung des Gaußschen Verfahrens die entsprechenden Zwischentemperaturen $f_{1a}, f_{1b}, f_{2a}, f_{2b}$ usw. ermitteln muß. Vor allem kommt aber ein solches Vorgehen, das nicht den Beharrungszustand voraussetzt, in Frage, wenn man nach Gl. (3) die Temperaturverteilung am Ende einer Periode ermittelt hat und man danach das beschriebene Verfahren auch auf die Berechnung der neuen Periode anwenden will. Denn am Ende der zuvor berechneten Periode hat man zunächst die Temperaturen t_0, t_1, t_2 usw. an den Intervallgrenzen, nicht aber die für die Gaußsche Methode benötigten Zwischenwerte $t_{1a}, t_{1b}, t_{2a}, t_{2b}$ usw. erhalten.

SCHLÜßBEMERKUNG

Die beschriebene Art der Anwendung der Gaußschen Integration dürfte auch bei verhältnismäßig geringer Streifenanzahl zu Ergebnissen hoher Genauigkeit führen. Inwieweit aber dieses Verfahren trotz der Komplikation, die durch die Gln. (9) bis (14) hinzukommt, gegenüber anderen bekannten Verfahren Vorteile zu bieten vermag, wird nur durch die bei praktischer Anwendung zu gewinnende Erfahrung entschieden werden können.

LITERATUR

1. W. Nußelt, Die Theorie des Winderhitzers, *Z. Ver. Dt. Ing.* 7, 85 (1927).
2. H. Hausen, *Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Gegenstrom*, Springer, Berlin und J. F. Bergmann, München (1950) (2. Auflage in Vorbereitung). *Siehe insbesondere*: Gleichung für den Temperaturverlauf der Speichermasse S. 367 sowie 390 u. 391. Integralgleichung für den Beharrungszustand S. 368 und 391. Anwendung der Simpsonschen Regel S. 389 bis 393. Wärmepolymethode S. 384.
3. H. Sander, Beitrag zur linearen Theorie des Regenerators. Dissertation Techn. Univ. München (1971).
4. C. E. Iliffe, Thermal analysis of the contra-flow regenerative heat exchanger. *Proc. Instn Mech. Engrs* 159, 363-371 (1948).
5. H. Hausen, Näherungsverfahren zur Berechnung des Wärmeaustausches in Regeneratoren, *Z. Angew. Math. Mech.* 11, 105-114 (1931).